東北大学機関リポジトリ
TOUR
Tohoku University Repository

# Designs and codes on association schemes and compact symmetric spaces

| | |
|---|---|
| 著者 | 栗原 大武 |
| number | 54 |
| 学位授与機関 | Tohoku University |
| 学位授与番号 | 理博第2601号 |
| URL | http://hdl.handle.net/10097/56847 |

| | |
|---|---|
| 氏名・（本籍） | 栗原大武（くりはらひろたけ） |
| 学位の種類 | 博　士（理　学） |
| 学位記番号 | 理博第２６０１号 |
| 学位授与年月日 | 平成23年３月25日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第４条第１項該当 |
| 研究科，専攻 | 東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻 |
| 学位論文題目 | Designs and codes on association schemes and compact symmetric spaces<br>（アソシエーションスキームとコンパクト対称空間上のデザインとコードについて） |
| 論文審査委員 | （主査）教授 小谷元子<br>教授 宮岡礼子<br>教授 宗政昭弘 |

# 論 文 目 次

A. Some formulas

# 論文内容要旨

アソシエーションスキームとは、有限集合XとXの関係の族の組みであって、その関係達がある種の代数的関係を満たすもののことである。アソシエーションスキームは、置換群の持つある種の性質を公理化したもの、もしくは対称空間のもつ距離構造のある種の性質を公理化したものであり、組み合わせ論における様々な概念（デザイン理論、コード理論、共形場理論にあらわれるフュージョン代数、ジョーンズのスピンモデル）を統一的に扱う枠組みとして精力的に研究されている。

本論文ではアソシエーションスキームを対称空間の離散類似と捕らえることで、幾何学におけるアイデアと代数的組合せ論の手法を合わせることを可能とし、アソシエーションスキーム研究に新しい視点を与えることを目的とする。特に、アソシエーションスキームの中のもっとも重要なクラスであるP多項式アソシエーションスキームとQ多項式アソシエーションスキームは、それぞれ退職空間の中で「2点等質空間」、「ランク１対称空間」に対応するクラスであり、これらを幾何学的な視点から理解する。本論文は4つの結果を元にして書かれており、それは大きく分けて3つの話題からなる。以下で結果の具体的な内容を見ていくことにする。

I　指標表の決定：

アソシエーションスキームにおける最も中心的な研究テーマはその指標表の決定である。アソシエーションスキームの指標表とは、アソシエーションスキームの隣接行列の固有値からなる行列とその逆行列のことであり、有限群から得られるアソシエーションスキームの指標表は元の群の指標表に対応する。有限単純群を分類する際に群の指標表が大きな役割を果たしたのと同様に、個々のアソシエーションスキームの指標表を求めることはアソシエーションスキームの分類に向けて重要な課題になる。ここで、アソシエーションスキームの指標表に関して既に知られていることについて述べる。D. A. Leonard (SIAM J. Math. Anal., 1985) によって、PかつQ多項式スキームの指標表は Askey-Wilson 多項式で表現されることが示された。つまり、PかつQ多項式スキームの指標表は１変数の直交多項式を用いて表すことができるのである。一方、P多項式スキーム や Q多項式スキームでないアソシエーションスキームの指標表も、良い系列については良い多変数直交多項式で書けると信じられているが、現時点ではあまり例は知られておらず、具体例を観察している段階にある。

本論文では、以下の２つの無限系列のアソシエーションスキーム（ランク一般の対称空間に対応する）についてその指標表が２つの１変数直交多項式をうまく組み合わせることで書けることを示した。

1．m-flat スキームの場合

有限体上のベクトル空間内のm-次元余空間をaffine m-flatといい、X. L. ZhuとF. G. Li (Acta Math. Appl. Sinica, 1997)はaffine m-flatの集合上にアソシエーションスキームの構造が入ることを示した。我々はこのaffine m-flatからなるアソシエーションスキームの指標がgeneralized Eberlein多項式を用いて表せることを示した。

2．Attenuated spaceの場合

Attenuated space とは、有限体上のベクトル空間で、与えられた部分空間と単位元のみを共通の元に

持つ部分空間の集合である。K. Wang、J. GuoとF. Li (European J. Combin., 2009) はattenuated spaceの中でも同じ次元を持つ部分空間からなる部分集合にアソシエーションスキームの構造が入ることを示した。我々はこのアソシエーションスキームの指標表について考察し、generalized Eberlein多項式とgeneralized Krawtchouk多項式を用いて表せることを示した。

更に、attenuated space上のアソシエーションスキームの特別な場合がaffine m-flatからなるアソシエーションスキームであることも示した。

II Larman-Rogers-Seidel 比を用いた Q-多項式スキームの特徴付け：

1977年にLarman、RogersとSeidel (Bull. London Math. Soc., 1977) はユークリッド空間の有限集合に関するある特徴づけを行った。それは有限集合の中でもその元同士の距離が2種類のもの（2距離集合）はそのサイズがある程度大きくなると、その二つの距離で定義される値（Larman-Rogers-Seidel 比）が整数になるというものであった。つまり、サイズが大きい2距離集合は距離の取る値に制限があり、その制限を用いてサイズが大きい2距離集合の分類が様々な研究者によってなされてきた。2005年に坂内英一氏と坂内悦子氏はEuropean J. Combin.において、クラスが2のアソシエーションスキームを球面に2距離集合として埋め込むと、Larman-Rogers-Seidel 比が指標表の中に表れることを示した。球面に2-距離集合として埋め込むことができるアソシエーションスキームは非常に限られており、そのためLarman-Rogers-Seidel 比の意味はこれまでよくわかっていなかった。

2009年に野崎氏によってLarman-Rogers-Seidelの定理が一般のs距離集合に対して拡張され たので、我々はクラスが2という条件をはずして、一般のクラスのアソシエーションスキームの場合について考察を行った。するとQ多項式スキームを球面に埋め込んで球面上の有限集合としてみた際にのみ、Larman-Rogers-Seidel 比が指標表の中に表れることが示すことが出来た。更に逆に、対称アソシエーションスキームが指標表の中に Larman-Rogers-Seidel 比を持つときにはQ多項式スキームになることを示した。つまり指標表と Larman-Rogers-Seidel 比をみることでQ多項式スキームの新しい同値条件を与えることが出来た。これは Larman-Rogers-Seidel 比の意味を明解にして、アソシエーションスキームに置ける重要なクラスであるQ多項式スキームの特徴付けを与える非常に重要な仕事である。

III　コード理論、デザイン理論：

元々、デザイン理論は実験を効率よく行うために考えられた実験計画法で考えられてきた理論であり、コード理論は2値のデータを送る際にエラーが起こっても復元出来るように考えだされた理論である。P. DelsarteはこれらのデザインやコードをPまたはQ多項式スキーム上で考えることにより、二つの理論を統一的に扱った。

P. Delsarte、J. M. GoethalsとJ. J. Seidel (Geom. Dedicata, 1977) はPまたはQ多項式スキームの性質と2点等質空間やランク1対称空間の類似性に気付き、球面上のデザインやコードの理論を与えた。球面デザインとは関数の球面上での積分を球デザイン上の和に置き換えることができるなどの性質を持つ、球面上の良い配置条件を満たす有限集合のことである。高い次元や高い次数を持った球面デザインの存在は P. SeymoreとT. Zaslavsk (1984 Adv. in Math.) によって示されているが、その具体的構成は難しい。デザインやコードの応用面での有用性を考えると、具体的に構成するアルゴリズムを提示することは重要である。まず、なるべく多くのデザインの構成法を得ることが、任意の次元と任意の次数に対する球面デザインの構成法を与える研究の最初の段階になる。

我々は小谷元子氏と砂田利一氏の結晶格子の標準的実現の対称性と調和のとれた配置に注目し、結晶の

形から具体的に球面デザインを構成した。具体的には任意の有限グラフを与えた際に、その有限グラフの隣接関係を基本パターンにもつ結晶格子が構成できるのであるが、最初の有限グラフがアソシエーションスキームであった場合には、その結晶の辺からなる集合が球面3デザインを構成することが示された。

# 論文審査の結果の要旨

本論文の目的はアソシエーション・スキームに関して得た新しい知見の公表である。アソシエーションスキームとは、有限集合XとXの関係の族の組みであって、その関係達がある種の代数的関係を満たすもののことである。アソシエーションスキームは、置換群の持つある種の性質を公理化したもの。もしくは対称空間のもつ距離構造のある種の性質を公理化したものであり、組み合わせ論における様々な概念（デザイン理論、コード理論、共形場理論にあらわれるフュージョン代数、ジョーンズのスピンモデル）を統一的に扱う枠組みとして精力的に研究されている。

本論文ではアソシエーションスキームを対称空間の離散類似と捕らえることで、幾何学におけるアイデアと代数的組合せ論の手法を合わせることを可能とし、アソシエーションスキーム研究に新しい視点を与えることを目的とする。特に、アソシエーションスキームの中のもっとも重要なクラスであるP多項式アソシエーションスキームとQ多項式アソシエーションスキームは、それぞれ「距離正則グラフ」「ランク1対称空間」をモデルとしたクラスであり、これらを幾何学的な視点から理解する。そのことにより、m-flat スキーム及び attenuated space の指標表の決定、Larman-Rogers-Seidel 比を用いた Q -多項式スキームの特徴付け、球面デザインの具体的構成などの結果を得、それを本論文にまとめた。

これらの結果は、自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，栗原大武提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。